Cálculo Numérico

Prof.ª Marijana Brtka

Propagação de Erros no Cálculo de Função de Funções

I. Seja a função $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Deseja-se estimar o erro inerente ao valor de z quando são dados os valores aproximados x_i^* com erro Δx_i (Δx_i inclui os erros experimentais, os erros de truncamento e os erros de arredondamento provenientes da determinação de x_i.):

$|x_1^* - x_1| \leq \Delta x_1$

$|x_2^* - x_2| \leq \Delta x_2$

....

$|x_n^* - x_n| \leq \Delta x_n$

(x_i^* é o valor aproximado e o x_i valor verdadeiro)
Desenvolvendo $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ em série de Taylor, vem

$$f(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2, ..., x_n^* + \Delta x_n) = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) +$$

$$+\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) + \Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) +$$

$$+.... + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) +$$

térmos de ordem superior.

Se Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n são pequenos de modo que os têrmos de ordem superior possam ser descartados, resulta

$$f(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2, ..., x_n^* + \Delta x_n) - f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) =$$

$$= \Delta z = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$$

e, portanto, nas condições *mais desfavoráveis*

$$\Delta z \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \right|$$

II. Exemplo: Dados os valores aproximados x_1^* e x_2^* com erros Δx_1 e Δx_2, determinar e erro em $z = f(x_1, x_2) = x_1/x_2$.

Sendo $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2}$ nas condições *mais desfavoráveis*

$$\Delta z \leq \frac{\Delta x_1}{|x_2^*|} + \Delta x_2 \left| \frac{x_1^*}{(x_2^*)^2} \right| = |z^*| \left[\frac{\Delta x_1}{|x_1^*|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2^*|} \right]$$