Cálculo Numérico - Prof.ª Marijana Brtka

Lista 2 -Raízes de Funções

1. Dadas as funções:

   (a) $x^3 + 3x - 1 = 0$,

   (b) $x^2 - senx = 0$,

   pesquisar a existencia de raízes reais e isolá-las em intervalos.

2. Justificar que a função:

$$f(x) = \cos\frac{\pi(x+1)}{8} + 0.148x - 0.9062 = 0$$

   possui uma raiz no intervalo $(-1, 0)$ e outra no intervalo $(0, 1)$.

3. Justifique que a equação: $f(x) = 4x - e^x = 0$ possui uma raiz no intervalo $(0, 1)$ e outra no intervalo $(2, 3)$.

4. Aplique o método da bissecção para calcular a raiz positiva de $x^2 - 7 = 0$ com $\epsilon < 10^{-2}$, partindo do intervalo inicial $[2.0, 3.0]$.

5. Aplique o método da bissecção para resolver:

   (a) $e^x - 3x = 0$,

   (b) $x^3 + \cos x = 0$,

   obtendo, em cada caso, a e b (iniciais) graficamente.

6. Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são: $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 2.0$. Considere ainda os processos iterativos:

   (a) $x_{k+1} = \frac{2x_k^2+2}{5}$,

   (b) $x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}$.
   Qual dos dois processos você utilizaria para obter a raiz x_1? Por que?

7. Considere as seguintes funções:

   (a) $\psi_1(x) = 2x - 1$,

   (b) $\psi_2(x) = x^2 - 2x + 2$,

   (c) $\psi_3(x) = x^2 - 3x + 3$.

   Verifique que 1 é raiz de todas estes funções. Qual delas você escolheria para obter a raiz 1, utilizando o processo iterativo $x_{k+1} = \psi(x_k)$? Com a sua escolha, exiba a sequencia gerada a partir da condição inicial $x_0 = 1.2$.

8. Deseja-se obter a raiz positiva da equação: $bx^2 + x - a = 0$, $a > 0$, $b > 0$, através do processo iterativo definido por:

$$x_{k+1} = a - bx_k^2.$$

Qual condição que devemos impor para a e b para que haja convergência? Por que?

9. A equação: $x^2 - a = 0$ possui uma raiz $\overline{x} = \sqrt{a}$. Explicar algebricamente e geometricamente por que a sequencia $\{x_k\}$, obtida através do processo iterativo definido por $x_{k+1} = \frac{a}{x_k}$, não converge para $\sqrt{a}$ qualquer que seja o valor de x_0.

10. A equação $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ tem três raízes. Um método iterativo pode ser definido usando a preparação óbvia da equação:

$$x = \pm\sqrt{\frac{e^x}{3}}.$$

   (a) Verificar que começando com $x_0 = 0$ haverá convergência:

      (i) para a raiz próxima de -0.5, se o valor negativo for usado, e

      (ii) para a raiz próxima de 1.0, se o valor positivo for usado.

   (b) Mostrar que a forma anterior não converge para a terceira raiz próxima de 4.0, qualquer que seja a aproximação inicial próxima da raiz.

11. O problema: resolva $f(x) = x + \ln x = 0$ pode ser transformado num problema equivalente da forma $x = \psi(x)$. Para o processo iterativo definido por $x_{k+1} = \psi(x_k)$; analisar a convergência quando:

   (a) $\psi(x) = -\ln x$,

   (b) $\psi(x) = e^{-x}$,

   no intervalo $[0.5, 0.6]$.

12. A equação $x^2 + 5x - 1 = 0$ tem uma raiz em $(0, 0.5)$. Verifique quais dos processos abaixo podem ser usados, com sucesso, para obtê-la:

   (a) $x_{k+1} = \frac{1-x_k^2}{5}$

   (b) $x_{k+1} = \frac{1-5x_k}{x_k}$,

   (c) $x_{k+1} = \sqrt{1-5x_k}$.

13. Considere a equação $4\cos x - e^x = 0$. Obtenha a raiz positiva com quatro casas decimais corretas usando o método de Newton. Confirme que a ordem de convergência do método de Newton é quadrática, isto é, $p = 2$.

14. Usando o método de Newton, com erro inferior a 10^{-2}, determinar uma raiz das seguintes equações:

(a) $2x = \tan x$,

(b) $5x^3 + x^2 - 12x + 4 = 0$

(c) $senx - e^x = 0$

(d) $x^4 - 8 = 0$.

15. Determinar, pelo método das secantes, uma raiz de cada uma das equações:

    (a) $x = -2.7 \ln x$,

    (b) $\log x - \cos x = 0$,

    (c) $e^x - \log x = 0$.

16. * A formula $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$ é candidata para se determinar o inverso de um número a; $\frac{1}{a}$. Mostre que, se a fórmula converge, então converge para $\frac{1}{a}$ e determine os limites da estimativa inicial x_0 para convergir. Teste suas conclusões nos casos:

    (a) $a = 9$ e $x_0 = 0.1$,

    (b) $a = 9$ e $x_0 = 1.0$.

17. Mostre que $x^3 - 2x - 17 = 0$ tem apenas uma raiz real e determine seu valor correto até duas casas decimais usando o método de Newton.

18. A equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ pode ser reescrita como $x = G(x)$ de diversas formas diferentes para aplicação do método do ponto fixo (iterações lineares). Determine analiticamente a região de convergencia para as raízes $x = 1$ e $x = 2$. Faça os gráficos de convergência $y = G(x)$ superposto à reta $y = x$ para os seguintes casos:

    (a) $x_{n+1} = (x_n^2 + 2)/3$,

    (b) $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$.

19. Considere a sequinte equação:

$$2\cos x - \frac{1}{2}e^x.$$

Nos itens abaixo considere como aproximações iniciais: $[0; 1]$ para bisseção; $x_0 = 0.5$ para o método de Newton; e $x_0 = 0.5$ e $x_1 = 0.6$ para o método da Secante. O teste de parada é através do valor da função com precisão 10^{-8}.

(a) Realize uma iteração de cada método: cálculo de nova aproximação e teste de parada.

(b) Resolvendo esse problema usando o Matlab, os resultados obtidos foram os seguintes:

método	iterações	tempo(seg)	x
Bisseção	27	0.09023	0.9047882184386253
Newton	4	0.04236	0.904788212178730189
Secante	5	0.0195	0.9047882178676230

(b.1) Qual o método com menor *tempo médio por iteração*? Este resultado é esperado? Por que?

(b.2) Analise o desempenho de cada método considerando: o algoritmo geral do método, o número de iterações e tempo de execução gastos nesse problema. Qual dos três métodos foi o mais eficiente na resolução deste problema?